Tutorium · Analysis II

Bonusaufgaben

Metrische und normierte Räume

Kapitel 13 — Metriken, Normen, offene & abgeschlossene Mengen, Folgen, Vollständigkeit

Bearbeitungszeit: ca. 30–45 Minuten
Umfang: 4 Aufgaben, aufsteigender Schwierigkeitsgrad

Bonusaufgaben von Mirkan Deniz Günkaya. Angaben ohne Gewähr.

Aufgabe 1 — Aufwärmen: Drei Integrale *(leicht)*

Berechne die folgenden bestimmten bzw. unbestimmten Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^2 \big(3x^2 - 4x + 5\big)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \Big(2\cos x + \frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x \qquad (x > 0)$

(c) Mit Substitution: $\displaystyle\int_0^1 2x\,e^{x^2}\,\mathrm{d}x$

Lösung zu Aufgabe 1

(a) Stammfunktion termweise:

$$\int_0^2 \big(3x^2 - 4x + 5\big)\,\mathrm{d}x = \Big[\,x^3 - 2x^2 + 5x\,\Big]_0^2 = \big(8 - 8 + 10\big) - 0 = \boxed{10}.$$

(b) Termweise integrieren (mit $x > 0$, also $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x$):

$$\int \Big(2\cos x + \tfrac{1}{x}\Big)\mathrm{d}x = 2\sin x + \ln x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(c) Substitution $u = x^2$, also $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$. Grenzen: $x = 0 \Rightarrow u = 0, \quad x = 1 \Rightarrow u = 1$. Damit

$$\int_0^1 2x\,e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^u\,\mathrm{d}u = \big[\,e^u\,\big]_0^1 = e - 1.$$

Der Faktor $2x\,\mathrm{d}x$ ist genau $\mathrm{d}u$ — deshalb passt die Substitution wie angegossen.

Aufgabe 2 — Hamming-Metrik & Normaxiome *(leicht)*

(a) ***(Hamming-Metrik).*** Auf $X = \{0,1\}^n$ ist die *Hamming-Metrik*

$$d(x,y) = \#\{\, i \in \{1,\dots,n\} : x_i \neq y_i \,\}$$

die Anzahl der Stellen, an denen sich zwei Bitfolgen unterscheiden. Sei $n = 5$ und

$$x = (1,0,1,1,0), \qquad y = (1,1,0,1,0), \qquad z = (0,1,0,1,1).$$

Berechne $d(x,y)$, $d(y,z)$ und $d(x,z)$ und überprüfe an diesem Beispiel die Dreiecksungleichung $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

(b) ***(Normaxiome konkret).*** Wir betrachten die Maximumsnorm $\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|\}$ auf $\mathbb{R}^2$. Weise für

$$v = (2,-3), \qquad w = (-1,4), \qquad \lambda = -2$$

die drei Norm-Eigenschaften nach: prüfe $\|\lambda v\|_\infty = |\lambda|\, \|v\|_\infty$ (Homogenität) und die Dreiecksungleichung $\|v+w\|_\infty \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$ an diesem konkreten Beispiel.

(c) ***(Zeichnen).*** Skizziere in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ die abgeschlossene Kugel $K_1(0) = \{v : \|v\|_\infty \leq 1\}$ und die offene Kugel $B_2(0) = \{v : \|v\|_\infty < 2\}$ im selben Koordinatensystem. Welche geometrische Form haben Kugeln in der Maximumsnorm?

Lösung zu Aufgabe 2

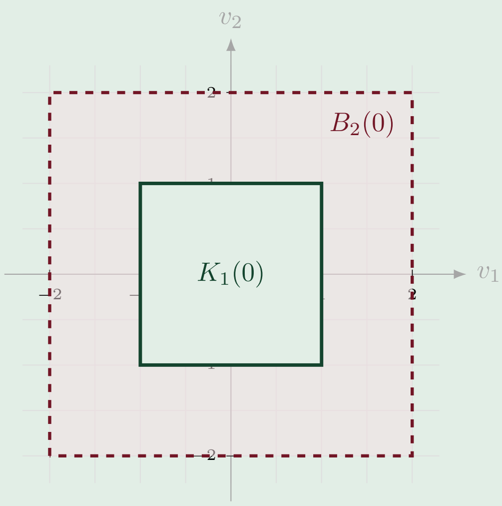
(a) Stellenweiser Vergleich (Position für Position):

	1	2	3	4	5	#Unterschiede
x	1	0	1	1	0	
y	1	1	0	1	0	
		$\neq$	$\neq$			$d(x,y)=2$

Analog: $y=(1,1,0,1,0)$ vs. $z=(0,1,0,1,1)$ unterscheiden sich an Stelle 1 und 5, also $d(y,z)=2$.
$x=(1,0,1,1,0)$ vs. $z=(0,1,0,1,1)$ unterscheiden sich an den Stellen $1,2,3,5$, also $d(x,z)=4$.
Dreiecksungleichung: $d(x,z)=4\leq 2+2=d(x,y)+d(y,z)$. ✓ (hier sogar mit Gleichheit)
(b) Mit $v=(2,-3)$, $w=(-1,4)$, $\lambda=-2$:

$$\|v\|_\infty=\max\{2,3\}=3,\qquad \|w\|_\infty=\max\{1,4\}=4.$$

Homogenität: $\lambda v=(-4,6)$, also $\|\lambda v\|_\infty=\max\{4,6\}=6$, und $|\lambda|\;\|v\|_\infty=2\cdot 3=6$. ✓
Dreiecksungleichung: $v+w=(1,1)$, also $\|v+w\|_\infty=\max\{1,1\}=1$, und $\|v\|_\infty+\|w\|_\infty=3+4=7$. Tatsächlich $1\leq 7$. ✓
(c) Kugeln in der Maximumsnorm sind *achsenparallele Quadrate* (mit Mittelpunkt 0 und Seitenlänge $2r$):



$K_1(0)$ (durchgezogen, dunkelgrün) ist das abgeschlossene Quadrat $[-1,1]^2$ *inklusive* Rand; $B_2(0)$ (gestrichelt, bordeaux) ist das offene Quadrat $(-2,2)^2$ *ohne* Rand.

Aufgabe 3 — Offene Halbscheibe: Rand & Inneres *(mittel)*

Wir betrachten den metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ und die *obere Halbscheibe*

$$H := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \text{ und } y > 0 \}.$$

(a) *Zeichnen & Anschauung.* Skizziere H. Aus welchen zwei "Stücken" besteht der Rand ∂H anschaulich?

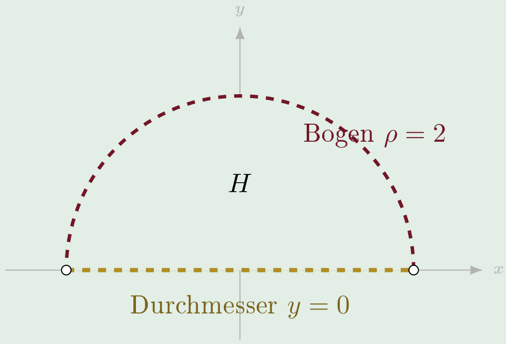
(b) Bestimme das Innere H°, den Abschluss $\overline{H}$ und den Rand ∂H. (Antworten als Mengen in der Form $\{(x, y) : \dots\}$ angeben. Tipp: schreibe ∂H als Vereinigung des Kreisbogens und des Durchmesserstücks.)

(c) Zeige, dass H *offen* ist: weise nach, dass jeder Punkt $a = (a_1, a_2) \in H$ ein innerer Punkt ist, indem du ein konkretes $\varepsilon > 0$ angibst mit $B_\varepsilon(a) \subseteq H$.

Lösung zu Aufgabe 3

Schreibe $\rho := \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$. Dann ist $H = \{\rho < 2 \text{ und } y > 0\}$ — die offene Kreisscheibe vom Radius 2, eingeschränkt auf die obere Halbebene.

(a) Skizze:



Der Rand besteht anschaulich aus *zwei Stücken*: dem oberen *Kreisbogen* ($\rho = 2,\ y \geq 0$) und dem *Durchmesserstück* auf der x-Achse ($y = 0,\ -2 \leq x \leq 2$). Beide gehören *nicht* zu H (alle Ungleichungen sind strikt).

(b) Da beide Bedingungen ($\rho < 2$ und $y > 0$) offene Bedingungen sind, ist H bereits offen und stimmt mit seinem Inneren überein:

$$H^\circ = H = \{(x,y) : \rho < 2,\ y > 0\}.$$

Der Abschluss ergänzt die Ränder ("$<$" wird "$\leq$"):

$$\overline{H} = \{(x,y) : \rho \leq 2,\ y \geq 0\}.$$

Der Rand ist die Vereinigung von Bogen und Durchmesserstück:

$$\partial H = \underbrace{\{(x,y) : \rho = 2,\ y \geq 0\}}_{\text{Kreisbogen}} \cup \underbrace{\{(x,y) : y = 0,\ -2 \leq x \leq 2\}}_{\text{Durchmesserstück}}.$$

(c) Sei $a = (a_1, a_2) \in H$, also $\rho_a := \sqrt{a_1^2 + a_2^2} < 2$ und $a_2 > 0$. Setze

$$\varepsilon := \min\{\,2 - \rho_a,\ a_2\,\} > 0.$$

Sei $b \in B_\varepsilon(a)$ beliebig, d.h. $\|b - a\|_2 < \varepsilon$. Dann gilt mit der Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_2$:

$$\|b\|_2 \leq \|a\|_2 + \|b - a\|_2 < \rho_a + (2 - \rho_a) = 2,$$

also liegt b in der offenen Scheibe. Außerdem ist die zweite Koordinate

$$b_2 = a_2 + (b_2 - a_2) \geq a_2 - |b_2 - a_2| \geq a_2 - \|b - a\|_2 > a_2 - a_2 = 0,$$

also $b_2 > 0$. Damit ist $b \in H$, und da b beliebig war, folgt $B_\varepsilon(a) \subseteq H$. Also ist a ein innerer Punkt — und da $a \in H$ beliebig war, ist H offen. $\square$

Idee: $2 - \rho_a$ ist der Abstand zum Bogen, a_2 der Abstand zur x-Achse; das Minimum sorgt dafür, dass die ganze Kugel von *beiden* Rändern wegbleibt.

Aufgabe 4 — Cauchy-Schwarz, Konvexität, Vollständigkeit *(sehr schwer)*

Drei zusammenhängende Bausteine. Du darfst die Sätze des Skripts (Cauchy–Schwarz, Konvexitätskriterium, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ist vollständig) ohne Beweis verwenden.

(a) ***(Cauchy–Schwarz konkret).*** Seien $a_1, \ldots, a_n > 0$. Zeige mit der Cauchy–Schwarz-Ungleichung

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\Big) \;\geq\; n^2.$$

(b) ***(Konvexität).*** Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = -\ln t$. Zeige mit dem Skript-Kriterium ($f'' \geq 0$), dass f konvex ist, und folgere für $a, b > 0$ und $\lambda \in (0,1)$ die "gewichtete AM–GM-Ungleichung"

$$a^{\lambda} b^{1-\lambda} \;\leq\; \lambda a + (1-\lambda) b.$$

(c) ***(Konvergenz einer Folge in $\mathbb{R}^2$).*** Betrachte die rekursiv definierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ mit

$$x_1 = (1, 0), \qquad x_{k+1} = \tfrac{1}{3}\, x_k + \big(0,\ \tfrac{2}{3}\big).$$

Zeige, dass (x_k) eine Cauchy-Folge ist, und bestimme den Grenzwert $a = \lim_{k\to\infty} x_k$.

> **Tipps.** (a) Wähle in Cauchy–Schwarz die Vektoren mit Komponenten $\sqrt{a_i}$ bzw. $1/\sqrt{a_i}$. (b) "$-\ln$ konvex" auf zwei Punkte $x_1 = \ln a$, $x_2 = \ln b$ anwenden und beide Seiten betrachten. (c) Zeige zuerst $\|x_{k+1} - x_k\|_2 \leq \frac{1}{3}\, \|x_k - x_{k-1}\|_2$ (Kontraktion) und nutze die geometrische Reihe.

Lösung zu Aufgabe 4

(a) Setze in $\mathbb{R}^n$ (mit Standardskalarprodukt) die Vektoren

$$u = \big(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}\big), \qquad v = \Big(\tfrac{1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \tfrac{1}{\sqrt{a_n}}\Big).$$

Dann ist $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_i}} = \sum_{i=1}^n 1 = n$, ferner

$$\|u\|_2^2 = \sum_{i=1}^n a_i, \qquad \|v\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}.$$

Cauchy–Schwarz $|\langle u, v\rangle| \le \|u\|_2 \, \|v\|_2$ liefert nach Quadrieren

$$n^2 = \langle u, v\rangle^2 \le \|u\|_2^2 \, \|v\|_2^2 = \Big(\sum_{i=1}^n a_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^n \tfrac{1}{a_i}\Big).$$

Das ist die Behauptung. (Gleichheit genau bei $a_1 = \dots = a_n$.) □

(b) *Konvexität.* Für $f(t) = -\ln t$ ist

$$f'(t) = -\tfrac{1}{t}, \qquad f''(t) = \tfrac{1}{t^2} > 0 \quad \text{für alle } t > 0.$$

Nach dem Skript-Kriterium (Satz 13.7) ist f damit konvex auf $(0, \infty)$.
Folgerung. Wende die Konvexitätsdefinition auf $x_1 = a > 0$, $x_2 = b > 0$ und $\lambda \in (0,1)$ an:

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \;\le\; \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b),$$

also

$$-\ln\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \;\le\; -\lambda \ln a - (1-\lambda)\ln b = -\ln\big(a^\lambda b^{1-\lambda}\big).$$

Multiplikation mit (-1) dreht die Ungleichung um:

$$\ln\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \;\ge\; \ln\big(a^\lambda b^{1-\lambda}\big).$$

Da ln streng monoton wachsend ist, folgt $\lambda a + (1-\lambda)b \ge a^\lambda b^{1-\lambda}$, d.h.

$$\boxed{a^\lambda b^{1-\lambda} \le \lambda a + (1-\lambda) b\,.}$$

(Für $\lambda = \frac{1}{2}$ ist das die klassische Ungleichung $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$.) □

(c) *Schritt 1 — Kontraktion.* Für die Abbildung $T(x) = \frac{1}{3}x + (0, \frac{2}{3})$ gilt mit der Homogenität und Linearität der Norm für alle x, y:

$$\|T(x) - T(y)\|_2 = \big\|\tfrac{1}{3}(x-y)\big\|_2 = \tfrac{1}{3}\,\|x-y\|_2\,.$$

Da $x_{k+1} = T(x_k)$, folgt mit $D_k := \|x_{k+1} - x_k\|_2$:

$$D_k = \|T(x_k) - T(x_{k-1})\|_2 = \tfrac{1}{3}\,\|x_k - x_{k-1}\|_2 = \tfrac{1}{3} D_{k-1}.$$

Induktiv also $D_k = \big(\frac{1}{3}\big)^{k-1} D_1$. Mit $x_2 = T(x_1) = \frac{1}{3}(1,0) + (0, \frac{2}{3}) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ist

$$D_1 = \|x_2 - x_1\|_2 = \big\|(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3})\big\|_2 = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Schritt 2 — Cauchy-Eigenschaft. Für $m > k$ liefert die Dreiecksungleichung und die geometrische Summe

$$\|x_m - x_k\|_2 \le \sum_{j=k}^{m-1} D_j = D_1 \sum_{j=k}^{m-1} \Big(\tfrac{1}{3}\Big)^{j-1} \le D_1 \big(\tfrac{1}{3}\big)^{k-1} \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\tfrac{1}{3}\Big)^{i} = D_1 \big(\tfrac{1}{3}\big)^{k-1} \cdot \tfrac{3}{2}.$$

Die rechte Seite hängt nicht von m ab und geht für $k \to \infty$ gegen 0. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein N mit $\|x_m - x_k\|_2 < \varepsilon$ für alle $m > k \geq N$ — (x_k) ist eine Cauchy-Folge.
Schritt 3 — Grenzwert. Da $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ vollständig ist (Banachraum), konvergiert (x_k) gegen ein $a \in \mathbb{R}^2$. Grenzübergang in $x_{k+1} = \frac{1}{3}x_k + (0, \frac{2}{3})$ liefert die Fixpunktgleichung

$$a = \tfrac{1}{3}a + (0, \tfrac{2}{3}) \iff \tfrac{2}{3}a = (0, \tfrac{2}{3}) \iff a = (0, 1).$$

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} x_k = (0, 1).}$$

Plausibilitätscheck: $x_1 = (1, 0),\ x_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}),\ x_3 = (\frac{1}{9}, \frac{8}{9}), \ldots$ — die erste Koordinate $\to 0$, die zweite $\to 1$, genau wie behauptet. $\square$

Bonusaufgaben von Mirkan Deniz Günkaya. Angaben ohne Gewähr. Viel Erfolg!